Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Sistemi Lineari

Siano $n, m \in \mathbb{N}$ – Un sistema lineare di n incognite e di m equazioni è un'espressione della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se denotiamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \; m \times n \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; n \times 1$$

e se

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \; m \times 1$$

e $B = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ $m \times 1$

Risolvere il sistema sopra equivale a risolvere un'eqz in forma matriciale

$$\boxed{A \cdot X = B}$$

Definiamo la matrice completa associata al sistema

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & & & b_2 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u> (Rouché - Capelli)

Sia (S) un sistema lineare di m-equazioni in n-incognite con matrice associata A e con matrice completa A'. Allora

(1) (S) ammette soluzioni $\Longleftrightarrow$ rango$A$ = rangoA'

(2) (S) ammette <u>unica soluzione</u>

$\Longleftrightarrow$ rango$A$ = rangoA' = n

$\Longleftrightarrow$ rango A = rango A' $= n$

(devono avere rango massimo)

(3) Se invece rango A = rango A' $\lneq n$

(non è rango massimo)

Allora il sistema (S) ammette ∞^{n-r} soluzioni

<u>Problema</u> se rango A = rango A' come calcolare le soluzioni ?

caso particolare $n = m$ (numero incognite uguale a numero di equazioni)

<u>Metodo</u> di <u>Cramer</u>

Sia (S) $A \cdot X = B$

sistema in forma matriciale, dove

A è matrice $n \times n$, X è matrice $n \times 1$

e B è matrice $n \times 1$

Se rango A = rango A' = n (ciò equivale a dire $\det A \neq 0$)

Da Rouché - Capelli sappiamo già che (S) ha unica soluzione, e viene calcolata nel seguente modo:

$\forall i = 1 \dots n$ considero

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

colonna i-esima

In tal modo Cramer ci dice che se $\det A \neq 0$, l'unica soluzione di (S) è data da

$$\boxed{\bar{x}_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad \forall i = 1 \dots n}$$

Approfondimento Rouché - Capelli

caso 1   Se $\text{rango } A < \text{rango } A' \Rightarrow \nexists$ sol di (S)

caso 2   Se $\text{rango } A = \text{rango } A' = n$

$\Rightarrow$ unica soluzione di (S)

In questo caso considero il minore di ordine n di A con determinante $\neq 0$

Suppongo, per comodità, che tale minore sia

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

—— a_{mn} solo le ultime righe

Del sistema tolgo le ultime eqni;
considero il sistema formato dalle prime n eqni

$$(S') \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

Allora l'unica soluzione di (S) è la soluzioni di (S') che ottengo attraverso Cramer

Caso 3 Se $\boxed{r = \text{rango } A = \text{rango } A' < n}$

Considero una sottomatrice di A $r \times r$ con determinante $\neq 0$

Per comodità supponiamo sia la sottomatrice seguente

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} & \begin{matrix} a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ & & a_{rn} \end{matrix} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} \quad \cdots & \cdots \quad a_{mn} \end{matrix}$$

Le infinite soluzioni di (S) si trovano nel modo seguente -

(•) Sopprimo le equazioni di (S) relative alle righe che non intervengono a formare il minore di ordine r con det $\neq 0$

(••) Invece, le colonne che non intervengono a formare il minore di ordine r con det ≠ 0, tali incognite le porto al 2° membro del sistema

Ossia, considero il nuovo sistema

$$(S')\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n) \end{cases}$$

Trovo "la soluzione" di (S') attraverso Cramer considerando però il 2° membro come se fosse un numero. In definitiva trovo soluzioni che dipendono $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$

(da n-r incognite: per questo si parla di ∞^{n-r} soluzioni)

Esercizio

$$(1)\quad \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ \dots \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} \\ -2x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Considero i minori di ordine 2 di A

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\det = 6 - 4 \neq 0$ OK $\Longrightarrow$ rango $A = 2$

Essendo rango $A' \leq 2$ e rango $A \leq$ rango A'

$\Longrightarrow$ rango $A' = 2$

$\Longrightarrow$ rango di A = rango $A' = 2$

Per tale deduzione abbiamo considerato il minore di ordine 2 di A che si ottiene sopprimendo la 1ª colonna di A

Studio il sistema

$\begin{cases} -2y + z = 1 - x \end{cases}$

$$(S') \quad \begin{cases} -2y + z = 1 - x \\ 4y - 3z = 2x \end{cases}$$

<u>uso Cramer</u>

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2x & -3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1-x \\ 4 & 2x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\det A_1}{\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}} \;, \quad z = \frac{\det A_2}{\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}$$

<u>ossia</u>: $\quad y = \frac{-3(1-x)-2x}{2} \qquad z = \frac{-4x-4(1-x)}{2} =$

ossia

$$y = \frac{x-3}{2} \qquad z = -2$$

Soluzioni di (S) $\quad \left\{ \left(x, \frac{x-3}{2}, -2\right) : x \in \mathbb{R} \right\}$

studio sistema

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Studio rango di A

Minori di ordine 2 di A

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\det = -1 \neq 0$$

Considero da (2) il nuovo sistema

$$(S'') \qquad \begin{cases} -y + z = 2 - x \\ z = -2x \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uso Cramer per soluzione (considero x come se fosse costante)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ -2x & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2-x \\ 0 & -2x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{\det A_1}{\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad z = \frac{\det A_2}{\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2-x+2x}{-1} \qquad z = \frac{2x}{-1} = -2x$$

$$\Rightarrow \quad y = x-2 \qquad z = -2x$$

$$\Rightarrow \text{Sol sistema } (2) = \{(x, x-2, -2x) : x \in \mathbb{R}\}$$

Interseco

$$Sol(1) \cap Sol(2)$$

$$\{(x, \tfrac{x-3}{2}, -2) : x \in \mathbb{R}\} \cap \{(x, x-2, -2x) : x \in \mathbb{R}\}$$

Ossia $\exists x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = x-2 \\ -2 = -2x \end{cases} \quad ?$$

$$\Rightarrow 2^{a} \quad x = 1 \longrightarrow 1^{a} \quad \frac{1-3}{2} = 1-2 \, ?$$

$$-1 = -1 \quad \text{OK}$$

Conclusione

$(1, -1, 2)$ è soluzione comune a (1) e (2)

Vettori nel piano

Tutte le grandezze per la cui definizione non concorrono altri elementi al di fuori della loro misura vengono dette grandezze scalari

In generale però, ci sono grandezze che non possono essere descritte solo attraverso un numero
Ad esempio, lo spostamento (oltre alla misura o modulo ho bisogno della direzione e verso)
In tal caso si parlerà di grandezze vettoriali.

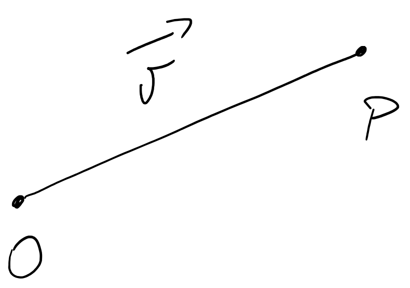
Un vettore è descritto attraverso

(•) un modulo (grandezza scalare = numero)

(•) verso

(•) direzione

In generale per descrivere un vettore in $\mathbb{R}^2$ ci bastano 2 punti nel piano



definiamo (1) $|\vec{v}|$ = modulo di $\vec{v}$ =

= distanza tra O e P

(2) Il <u>verso</u> di $\vec{v}$ è quello che va dal punto O al punto P

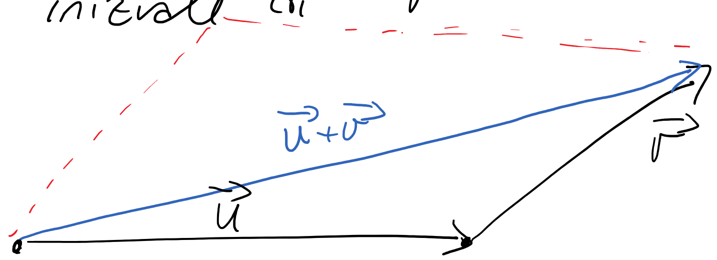
(infatti O è detto punto di partenza e P punto di arrivo)

(3) la <u>direzione</u> è la retta che congiunge i punti O e P

<u>Operazioni tra vettori</u>

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^2$

essendo i vettori equivalenti per traslazioni posso assumere che il punto finale di $\vec{u}$ coincida col punto iniziale di $\vec{v}$



$\vec{u}$ e $\vec{v}$ formano due lati di un parallelogramma

si definisce vettore somma $\vec{u}+\vec{v}$ come il vettore descritto dalla diagonale del parallelogramma

Sia $m \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ vettore di $\mathbb{R}^2$:

Definiamo $m \cdot \vec{v}$ come il vettore che ha

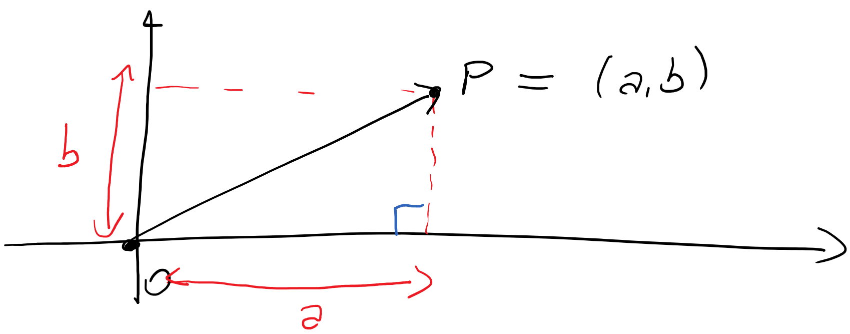
(•) modulo $|m \cdot \vec{v}| = |m| \cdot |\vec{v}|$

valore assoluto di m

(•) verso $= \begin{cases} \text{stesso verso di } \vec{v} \text{ se } m>0 \\ \text{verso contrario di } \vec{v} \text{ se } m<0 \end{cases}$

(•) direzione $(m \cdot \vec{v})$ = direzione $\vec{v}$

Sia $\vec{v}$ un vettore di $\mathbb{R}^2$. A meno di traslare possiamo assumere che il punto iniziale di $\vec{v}$ sia l'origine di $\mathbb{R}^2$

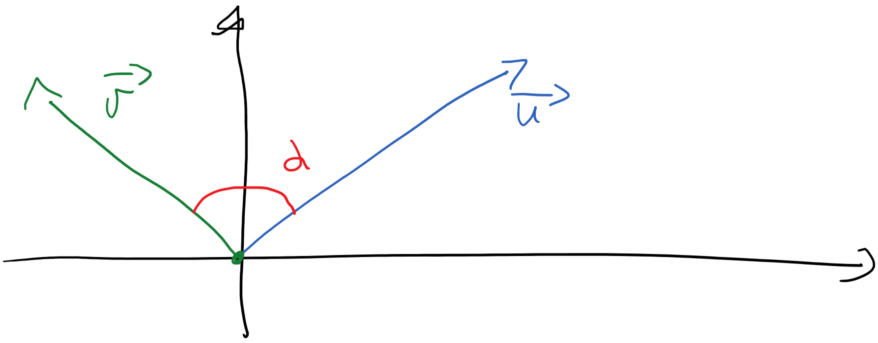


Dal teorema di Pitagora

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

(•) Prodotto scalare tra vettori

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori in $\mathbb{R}^2$ (con entrambi punti iniziali coincidenti all'origine di $\mathbb{R}^2$)



Tali vettori formeranno tra loro un angolo α

Definiamo prodotto scalare tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$ come il numero

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)}$$

Nota che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono perpendicolari se $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Ossia

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Se osserviamo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ come punti del piano

$$\vec{u} = a_u \vec{x} + b_u \vec{y} \qquad (\text{ossia } P = (a_u, b_u))$$

e $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono

i <u>versori</u> (vettori di modulo 1) descritti da asse x e asse y risp

$$\vec{v} = a_v \vec{x} + b_v \vec{y}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a_u \vec{x} + b_u \vec{y}) \cdot (a_v \vec{x} + b_v \vec{y})$$

$$= a_u \cdot a_v |\vec{x}|^2 + (a_u \cdot b_v) \cancel{(\vec{x} \cdot \vec{y})}^{0} + (b_u a_v) \cancel{(\vec{y} \cdot \vec{x})}^{0}$$

$$+ b_u \cdot b_v \; |\vec{y}|^2$$

Nota che $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ poiché gli assi sono ortogonali.

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = a_u a_v + b_u b_v}$$

Concludo: $\vec{u} = (a_u, b_u)$ $\vec{v} = (a_v, b_v)$

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff a_u a_v + b_u b_v = 0}$$

Condizione di ortogonalità

<u>Esercizio</u>

p^2

Esercizio

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+|2-x^2|}}\,dx = (*)$$

$2-x^2 \geq 0$? $\quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ siamo in $[0,2]$

$$|2-x^2| = \begin{cases} 2-x^2 & \text{se } x \in [0,\sqrt{2}] \\ x^2-2 & \text{se } x \in [\sqrt{2},2] \end{cases}$$

$$(*) = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+|2-x^2|}}\,dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+|2-x^2|}}\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}}}\,dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-2+x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}} x\,dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2-2}}\,dx$$

Cerco (1) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$$\Longrightarrow \int_0^{\sqrt{2}} x\,dx = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 1$$

Cerco (2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x^2-2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{2x^2-2}}$

1° sost

$$\frac{1}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{z}}\Bigg]_{z=2x^2-2} =$$

$$= \frac{1}{4}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz\Bigg]_{z=2x^2-2} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{4}\cdot\sqrt{z}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-2}$$

$$\Longrightarrow \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x}{\sqrt{2x^2-2}}\,dx = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2^2-2} - \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Conclusione

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+|2-x^2|}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

Esercizio

$$\int \frac{4\lg x - 5}{x(2\lg x + 3)}\,dx =$$

$$= \int \underbrace{\frac{4\lg x - 5}{2\lg x + 3}}_{g(f(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)}\,dx \overset{1^e \text{ sost}}{=\!=}$$

$f(x) = \lg x$

$$= \left.\int \frac{4z - 5}{2z + 3}\,dz\,\right]_{z=\lg x}$$

$$\begin{array}{l|l} 4z - 5 & 2z + 3 \\ \hline 4z + 6 & 2 \\ \hline -11 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{4z - 5}{2z + 3} = 2 + \frac{(-11)}{2z + 3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{4z - 5}{2z + 3} = \int 2\,dz - 11 \int \frac{1}{2z + 3}\,dz$$

$$= 2z - 11 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2\,dz}{2z + 3} =$$

$$= 2z - \frac{11}{2} \lg |2z + 3| =$$

$(z = \lg x) \qquad = 2\lg x - \frac{11}{2} \lg|2\lg x + 3| + \underline{\underline{\text{cost}}}$

<u>Esercizio</u>

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y = 1 \\ 5x - 5y + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad 3\times 3$$

$$\det A = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} - \cancel{0 \cdot \det} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -10 \cancel{-(-10)} + (-2 - (-2)) = 0$$

Considero il minore di A di ordine 2

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ rango $A = 2$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Considero minori di ordine 3 di A'

<u>1^e colonna</u>

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -(6) + 2(2) = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ rango $A' = 3 \neq$ rango $A = 2$

$\Rightarrow$ $\nexists$ sol di (S)